

МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МОРФОЛОГИЧЕСКОГО МЕТОДА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ

Харченко Е. А.¹, старший преподаватель, ✉ elenakhaa@yandex.ru,
orcid.org/0000-0002-5082-4564

¹Московский политехнический университет, ул. Б. Семёновская, д. 38, 107023, Москва, Россия

Аннотация

Предлагается механическая модель морфологического метода принятия решений в условиях неопределённости с целью подкрепления математического аппарата, заложенного в методе. Сначала методы экспертных оценок разделяются на две укрупнённые группы, в одной из которых позиционируется рассматриваемый метод. Потом приводится описание механической модели, имитирующей элементы и характеристики методов выделенной группы. Затем описываются несколько специфичных вариантов модели: обработка результатов наблюдений сопоставляется обработке результатов опроса экспертов. Также иллюстрируются способ сравнения состояний системы и способ наложения ограничений на состояние системы. Непосредственно модель построена на простых и хорошо изученных физических эффектах и явлениях.

Ключевые слова: системный анализ, морфологический ящик, теория решения изобретательских задач, техническое устройство, Фриц Цвикки, ТРИЗ.

Цитирование: Харченко Е. А. Механическая модель морфологического метода принятия решений в условиях неопределённости // Компьютерные инструменты в образовании. 2024. № 3. С. 14–32. doi:10.32603/2071-2340-2024-3-14-32

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье рассматривается механическая модель, имитирующая несогласованные оценки экспертов при их опросе, а также метод обработки измерений в рамках этой модели, позволяющий выявить области и точки качественной устойчивости системы — области значений параметров системы, каждая из которых содержит свою точку устойчивости, в которую приходит система под действием внутренних сил при прекращении внешних воздействий. Эти точки качественной устойчивости имитируют точки сгущения значений параметров, соответствующих каждому классу рассматриваемых объектов. Подобное сгущение значений параметров вокруг некоторых средних значений, характеризующих класс объектов в конкретный период времени, наблюдается на практике среди уже созданных технических объектов с близким функциональным назначением. Примером могут служить классы компьютеров, а именно макро-, мини-, средних и других.

Для примера, при прогнозировании технико-экономических показателей (ТЭП) причины сгущения значений параметров необъяснимы, иначе бессмысленно применять ме-

тоды экспертных оценок (существуют более точные). Но поскольку это сгущение обычно наблюдается на практике, его необходимо выявить.

2. ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДОВ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Под технико-экономическими показателями разрабатываемого технического средства будем понимать набор его параметров — паспортных, стоимостных и прочих. Задача прогнозирования ТЭП состоит в определении значений всех параметров, составляющих ТЭП, на ранних этапах жизненного цикла образца.

В контексте решения поставленной задачи существующие методы экспертных оценок можно условно разделить на две неравные группы:

- методы, позволяющие оценить конкретные, заранее сформулированные, альтернативы (комбинации значений ТЭП) и выбрать из них наиболее подходящую;
- методы, позволяющие сначала сформировать альтернативные варианты, а затем провести их оценку и выбрать из них наиболее подходящий.

Методы первой группы составляют большую, наиболее проработанную, часть методов экспертных оценок. Но при решении рассматриваемой задачи они носят второстепенный характер и могут быть применены лишь на заключительном этапе (при оценке конкретных наборов значений ТЭП). С точки зрения комбинаторики (правила произведения), число комбинаций значений ТЭП обычно столь велико, что не позволяет сформировать альтернативы методами прямого перебора значений показателей. Зачастую ситуация усложняется одновременным наличием количественных и качественных показателей. По этой причине число оцениваемых альтернатив (комбинаций значений ТЭП) необходимо сократить, тогда появится возможность применять методы первой группы.

Для прогнозирования ТЭП более подходят методы экспертных оценок, составляющие вторую группу (наименее разработанную) и позволяющие сформировать небольшое количество альтернатив для дальнейшего их сравнения и выбора из них наиболее соответствующей поставленной задаче (то есть выбора комбинации значений ТЭП, обеспечивающей применение соответствующего образца техники по прямому назначению).

Методы данной группы сводятся к использованию трёх базовых процедур, каждая из которых может иметь свои разновидности:

- индивидуальной экспертной оценки;
- усреднения индивидуальных экспертных оценок;
- свёртки значений параметров (в нашем случае значений ТЭП) в один, чаще всего безразмерный, отражающий эффективность данного решения.

Индивидуальная экспертная оценка заключается в оценке каждым привлечённым экспертом: 1) совокупности значений параметров исследуемого объекта (совокупности значений ТЭП) приписыванием каждому параметру объекта значения из его области определения; 2) совокупности значений важностей оцениваемых параметров для успешного решения поставленной задачи приписыванием каждому параметру объекта некоторого числа (чаще баллов) из ограниченного диапазона, характеризующего с точки зрения конкретного эксперта значимость этого параметра (данной составляющей ТЭП) для успешного использования данного образца по предназначению.

Пусть m — количество привлечённых экспертов, а n — количество оцениваемых параметров. Обозначим искомые составляющие ТЭП через $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$. Результатами

проведения индивидуальных экспертных оценок являются матрица оценок параметров

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где a_{ij} — оценка i -ым экспертом значения j -ого параметра, и матрица оценок значимостей (важностей) параметров

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & b_{ij} & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где b_{ij} — оценка i -ым экспертом важности j -ого параметра.

Усреднение индивидуальных экспертных оценок заключается в искусственном введении вероятностного пространства. Каждому эксперту перед проведением опроса приписывается определённый вес (явно или неявно), отражающий по мнению руководителей экспертизы его компетентность в рассматриваемой области.

Неявное приписывание весов осуществляется при отождествлении компетенций различных экспертов. В этом случае усреднённым значением конкретного параметра является среднее арифметическое оценок параметра, данных различными экспертами.

Явное приписывание веса каждому эксперту (точнее мнению каждого эксперта) заключается в приписывании ему целого числа (в большинстве случаев) из ограниченного диапазона. Например, экспертов ранжируют по их компетенции: наименее компетентному присваивается вес 1, а наиболее компетентному — вес m , где m — количество привлечённых экспертов.

Пусть экспертам соответственно приписаны веса $c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_m$, тогда среднее значение j -ого параметра рассчитывается по формуле:

$$\bar{x}_j = \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{\sum_{k=1}^m c_k} \cdot a_{ij}. \quad (3)$$

Это соответствует искусственно введённому распределению вероятностей, описываемому вариационным рядом (табл. 1). Тогда формулу (3) можно интерпретировать как формулу расчёта математического ожидания случайной величины, заданной приведённым рядом.

Таблица 1. Параметр ТЭП как случайная величина

Оценки значений j -ого параметра каждым экспертом	a_{1j}	a_{2j}	...	a_{ij}	...	a_{mj}
Псевдовероятности каждой оценки j -ого параметра	$c_1 / \sum_{k=1}^m c_k$	$c_2 / \sum_{k=1}^m c_k$	...	$c_i / \sum_{k=1}^m c_k$	...	$c_m / \sum_{k=1}^m c_k$

Способ приписывания весов экспертам зависит от их качественного состава. В действительности различные способы базируются больше на предположениях о качественном составе экспертов, чем на объективном измерении.

В простейшем случае (в случае равноправия экспертов, то есть одинаковой компетенции) формула (3) становится формулой расчёта среднего арифметического. Пусть

$$c_1 = c_2 = \dots = c_m = c,$$

тогда:

$$\bar{x}_j = \sum_{i=1}^m \frac{c}{cm} \cdot a_{ij} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m a_{ij}.$$

Все методы усреднения экспертных оценок базируются на неявном предположении о согласованности экспертных оценок (их статистической однородности), поскольку основаны на вычислении математического ожидания псевдослучайной величины. Существуют статистические методы оценки этой однородности, но они не рассматривают:

- действия руководителей экспертизы в случае невысокой их однородности (при этом градации степени согласованности оценок не рассматриваются);
- действия руководителей экспертизы в случае нарушения согласованности ответов экспертов (не рассматривается возможность использования неоднородных оценок, только постулируется невозможность опираться на них при принятии решений).

Свёртка значений параметров (в нашем случае составляющих ТЭП) в один, отражающий эффективность альтернативных вариантов решения (в нашем случае совокупностей значений ТЭП образцов техники) поставленной задачи, может осуществляться различными методами.

Процедура свёртки значений по своей сущности близка к первой группе методов экспертных оценок. Но у любого метода первой группы существует своя область применимости, которую реально можно проверить лишь в ходе обработки результатов опроса экспертов. При решении конкретной практической задачи это может привести к длительному поиску метода, применимого в конкретном случае.

Например, широкое использование получили методы парных сравнений, принадлежащие первой группе. Они очень популярны, поскольку позволяют сравнивать альтернативные варианты решения задачи с помощью методов алгебры и теории графов. Их суть сводится к введению на множестве альтернатив бинарного отношения предпочтения (являющегося частным случаем отношения нестрогого порядка).

Отношение большей предпочтительности альтернативы α_2 над альтернативой α_1 (обозначается как $\alpha_1 \leq \alpha_2$ или $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$) по определению имеет место тогда и только тогда, когда эффективность решения α_1 поставленной задачи меньше или равна эффективности решения α_2 [1]. Под эффективностью решения в данном случае понимается степень достижения решением поставленной в задаче цели.

После попарного сравнения альтернатив (каждой с каждой, кроме себя самой) строится ориентированный граф. При этом возможны следующие случаи:

- существует единственная вершина графа (альтернативное решение), имеющая выходящие стрелки и не имеющая входящих стрелок (эта альтернатива и будет искомым решением задачи);
- существует несколько подобных вершин (тогда дальнейшее сравнение и выбор необходимо осуществить другими способами);
- не существует подобных вершин (этот случай соответствует такому нарушению транзитивности отношения предпочтительности, который не позволяет применить метод парных сравнений).

Последнее означает наличие циклов в ориентированном графе. Циклы возможны и в первых двух случаях, но наличие вершин, у которых существуют только выходящие стрелки, всё же позволяет решить задачу оценки альтернатив и выбора наилучшей методом парных сравнений.

Графически пример цикла в ориентированном графе можно проиллюстрировать следующим образом: пусть $\alpha_1 \preceq \alpha_2$, $\alpha_2 \preceq \alpha_3$ и $\alpha_3 \preceq \alpha_1$, что соответствует графу, представленному на рисунке 1. Выясняется подобное нарушение применимости метода парных сравнений только в ходе обработки результатов опроса экспертов. Аналогично обстоит дело и с другими методами экспертных оценок первой группы.

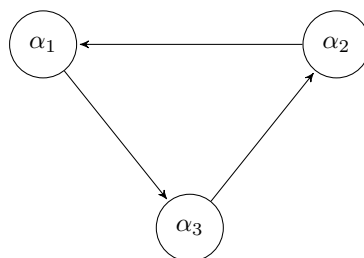


Рис. 1. Случай неприменимости метода парных сравнений

Отметим, что методы обработки результатов опроса экспертов из первой группы не подходят для решения задачи прогнозирования ТЭП образцов техники, поскольку нельзя заранее ожидать согласованности ответов экспертов.

У методов экспертных оценок второй группы существуют свои способы оценки альтернатив и выбора наиболее эффективной, оптимальной. Самыми универсальными и поэтому самыми используемыми являются свёртки показателей (аддитивная и мультипликативная) к одному показателю, его значение соответствует эффективности конкретного решения (конкретной альтернативы). Выбирается та альтернатива, у которой этот показатель имеет максимальное значение.

Рассмотрим подробнее аддитивную свёртку. В результате опроса экспертов формируется матрица B (2). Кроме того, перед проведением опроса каждому эксперту назначается его вес: $c_1, c_2, \dots, c_m$. На основании этих данных рассчитывается усреднённая оценка значимости каждого параметра:

$$\bar{b}_j = \sum_{i=1}^m \frac{c_i}{\sum_{k=1}^m c_k} \cdot b_{ij}. \quad (4)$$

Свёртка же производится по формуле

$$W_i = \sum_{j=1}^n U_j(\bar{b}_j) \cdot a_{ij} = U_1(\bar{b}_1) \cdot a_{i1} + U_2(\bar{b}_2) \cdot a_{i2} + \dots + U_n(\bar{b}_n) \cdot a_{in}, \quad (5)$$

где: W_i — значение обобщающего показателя альтернативного решения, сформулированного i -ым экспертом; $\bar{b}_j$ — средняя оценка значимости j -ого параметра для достижения поставленной цели; a_{ij} — оценка i -ым экспертом j -ого параметра; $U_j(\bar{b}_j)$ — функция, описывающая аддитивный вклад j -ого параметра в значение обобщающего показателя (конкретный параметр может быть самым важным, но обладать малым абсолютным значением, поэтому непосредственное суммирование произведений $\bar{b}_j \cdot a_{ij}$ в общем случае лишено смысла).

Функции $U_j(x_j)$ формируются, исходя из сущности задачи, до проведения опроса экспертов непосредственно руководителями экспертизы. Они также могут являться предметом самостоятельного опроса экспертов.

Мультипликативная свёртка показателей строится аналогично, но обобщающий показатель вычисляется по формуле:

$$\widetilde{W}_i = \prod_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}(\bar{b}_j) = \tilde{a}_{i1}(\bar{b}_1) \cdot \tilde{a}_{i2}(\bar{b}_2) \cdot \dots \cdot \tilde{a}_{in}(\bar{b}_n).$$

Мультипликативная свёртка с помощью логарифмирования может быть приведена к аддитивной. Обе обладают сходными свойствами, поэтому далее мультипликативную свёртку рассматривать не будем.

На практике методы экспертных оценок второй группы с использованием базовых процедур строятся по двум основным схемам (других универсальных подходов к решению задачи прогнозирования ТЭП не существует). В обоих случаях: 1) если требуется, назначаются веса привлечённым экспертам ($c_1, c_2, \dots, c_n$) и формируются функции $U_j(x_j)$; 2) производится опрос экспертов, в результате которого формируются матрицы A (1) и B (2); 3) вычисляются усреднённые оценки значимостей каждого параметра $\bar{b}_j$ (4). Далее:

- в первой схеме производится усреднение оценок каждого параметра по формуле (3), после чего производится оценка эффективности полученного решения по формуле

$$W = \sum_{j=1}^n U_j(\bar{b}_j) \cdot \bar{x}_j = U_1(\bar{b}_1) \cdot \bar{x}_1 + U_2(\bar{b}_2) \cdot \bar{x}_2 + \dots + U_n(\bar{b}_n) \cdot \bar{x}_n;$$

- во второй схеме для каждого альтернативного решения (каждой комбинации значений ТЭП) рассчитывается его эффективность по формуле (5), после чего выбирается альтернатива с максимальным значением эффективности W_i .

Недостатками существующих в настоящее время методов экспертных оценок второй группы, применяемых также при прогнозировании ТЭП, являются следующие:

1. Затруднена обработка результатов опроса экспертов при наличии одновременно как количественных, так и качественных параметров.
2. Не обеспечена возможность принятия решения при несогласованных ответах экспертов. Под согласованными ответами экспертов далее будем понимать такие экспертные оценки, когда построенная по каждому количественному параметру гистограмма имеет единственный пик (вершину). Несогласованность ответов экспертов (наличие многовершинной гистограммы) говорит о существовании нескольких различных точек сгущения значений параметров (альтернативных вариантов ТЭП), что скорее характеризует предметную область, чем некомпетентность экспертов. Эксперты, давая несогласованные оценки, обычно имеют в виду различные точки сгущения параметров. Существующие методы ставят своей целью не выявление точек сгущения, а получение усреднённых оценок параметров, что в большинстве случаев лишено смысла.
3. Отсутствует возможность оценить близость двух произвольно взятых альтернатив, полученных в результате обработки опроса экспертов. Положение осложняется наличием в составе ТЭП качественных составляющих.
4. Экспертные методы применяются, в основном, для исследований недостаточно изученных предметных областей. В большинстве случаев невозможно объективно количественно оценить эффективность применяемых решений (то есть построить

функции для свёртки показателей). Поэтому выбор альтернатив на основе максимизации показателя эффективности не всегда может быть осуществлён.

Поясним на примере второй из приведённых тезисов. Например, компьютеры различных классов могут описываться одинаковыми наборами параметров, однако в каждом классе значения этих параметров группируются вокруг некоторых средних для этого класса значений (они и являются точками сгущения). Усреднение значений параметров (без учёта принадлежности компьютеров к конкретному классу) вообще лишено практического смысла. Отметим, что внутри отдельного класса могут существовать подклассы в зависимости от преобладающего функционального использования компьютеров. Каждый такой подкласс обладает единственной точкой сгущения.

На основе проведённого анализа и с применением технологий теории решения изобретательских задач (ТРИЗ) ранее был выработан и представлен в работах [2, 3] морфологический метод принятия управленческих решений. Он относится к экспертным методам второй группы и состоит в модификации морфологического метода поиска новых технических решений (а именно метода «морфологического ящика»), разработанного в 1942 году швейцарским математиком и астрономом Фридрихом Цвикки [4, 5].

В подкрепление математического аппарата модифицированного морфологического метода разработана и представлена в рамках данной работы механическая модель этого метода.

3. МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДОВ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Опишем построенную концептуальную механическую модель экспертных методов второй группы, предназначенных для прогнозирования значений ТЭП (аналогия между моделью и рассматриваемыми методами указана в таблице 2):

- диэлектрическая прозрачная жёсткая полусфера жёстко закреплена на диэлектрическом прозрачном жёстком основании, расположенном горизонтально;
- в плоскости основания существуют углубления, наблюдать которые невозможно из-за прозрачности основания;
- внутри полусферы расположен незакреплённый стальной шарик;
- на шарик хаотично (по силе, направлению и моментам времени) воздействует внешняя сила (магнитное поле), способная переместить шарик в любое возможное место внутри полусферы;
- кроме того, на шарик могут воздействовать ещё две внешние силы (постоянные электромагниты рядом со сферой) — постоянным образом;
- факт существования этих сил в конкретный момент можно наблюдать по индикаторам (лампочкам в цепи постоянных электромагнитов), но измерить их нельзя;
- полусфера освещается световыми импульсами (только в течение которых можно наблюдать шарик) в случайные моменты времени;
- продолжительность импульсов достаточна для измерения прямоугольных декартовых координат шарика на плоскости (например, посредством фотографической регистрации), но мала по сравнению с промежутками между импульсами возмущающего магнитного поля.

Исследователь имеет возможность наблюдать совокупность параметров системы (x_1, x_2, x_3, x_4) , где: x_1, x_2 — декартовы прямоугольные координаты шарика на плоскости; x_3, x_4 — логические переменные, равные 1, если горит соответствующий индикатор включения внешнего постоянного электромагнита, или 0 в противоположном случае.

Таблица 2. Соответствие свойств механической модели и методов экспертных оценок

№ п/п	Элементы и характеристики механической модели	Элементы и характеристики методов экспертных оценок
1	Измерение комбинации значений параметров (x_1, x_2, x_3, x_4) в момент световой вспышки.	Оценка конкретным экспертом комбинации значений ТЭП при проведении опроса.
2	Переменные x_1, x_2 .	Количественные составляющие ТЭП, оцениваемые экспертом.
3	Переменные x_3, x_4 .	Качественные составляющие ТЭП, оцениваемые экспертом.
4	Прозрачность полусферы и основания, а также неизвестность: физических параметров шарика; количества, координат, размеров и глубины впадин.	Неизученность предметной области.
5	Система приходит в качественно устойчивое состояние при прекращении внешних воздействий под воздействием силы тяжести на стальной шарик.	Фрагментарные качественные данные о предметной области.
6	Совокупность качественно устойчивых состояний системы, описываемых координатами впадин и перечнем значений качественных параметров.	Совокупность классов рассматриваемых объектов техники с соответствующими точками сгущения значений параметров объектов каждого класса (то есть средних значений параметров для каждого класса).
7	Различные наблюдаемые комбинации значений переменных (x_1, x_2, x_3, x_4) соответствуют различным впадинам.	Несогласованность ответов нескольких (или всех) экспертов (каждый эксперт интуитивно представляет класс объектов, отличный от тех, которые имеют в виду его коллеги).
8	Цель наблюдателя: выявление областей качественно устойчивых состояний системы (с соответствующими точками качественной устойчивости), удовлетворяющих заданным (по каким-то причинам здесь не рассматриваемым) качественным ограничениям (например, $(x_1 < a_2) \& (x_3 = 1) = 1$ — шарик должен чаще находиться в тех областях, для которых справедливы эти соотношения).	Цель экспертизы: выявление областей согласованных оценок экспертов, соответствующих классам рассматриваемых объектов (с соответствующими точками сгущения значений параметров); выявление и выбор класса (через варьирование значений параметров, которые можно менять), максимально удовлетворяющего требованиям заказчика, которые заданы зависимостями над качественными переменными.

Перед исследователем стоит задача определить качественно устойчивые состояния системы (и области качественной устойчивости, им соответствующие) с помощью регистрации и измерения значений параметров системы в моменты вспышек света, а также выбора метода обработки результатов наблюдений.

Описанная модель выглядит только умозрительной (искусственной и не имеющей практического применения), и это соответствует действительности. Но её главное назначение — иллюстрация методов экспертных оценок второй группы с помощью наглядных и хорошо изученных понятий [6–9].

4. ОБРАБОТКА МОДЕЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Приведём несколько модельных примеров. Вначале рассмотрим метод обработки информации, применяемый в настоящее время в методах экспертных оценок второй группы, а именно усреднение значений численных параметров. Рассмотрим его при том состоянии системы, при котором он даст ответ, соответствующий действительности (в данном случае — модели).

Предположим отсутствие электромагнитов (описываемых переменными x_3 и x_4) и наличие единственного углубления в основании, центр которого имеет декартовы координаты $x_1 = a_1$ и $x_2 = b_1$ (рис. 2). На рисунке также представлены статистические плотности распределения случайных величин x_1 и x_2 (сглаженные гистограммы случайных величин x_1 и x_2). Механический смысл одновершинности этих плотностей распределения нагляден: при отсутствии внешних воздействий шарик будет находиться чаще внутри впадины, чем вне её.

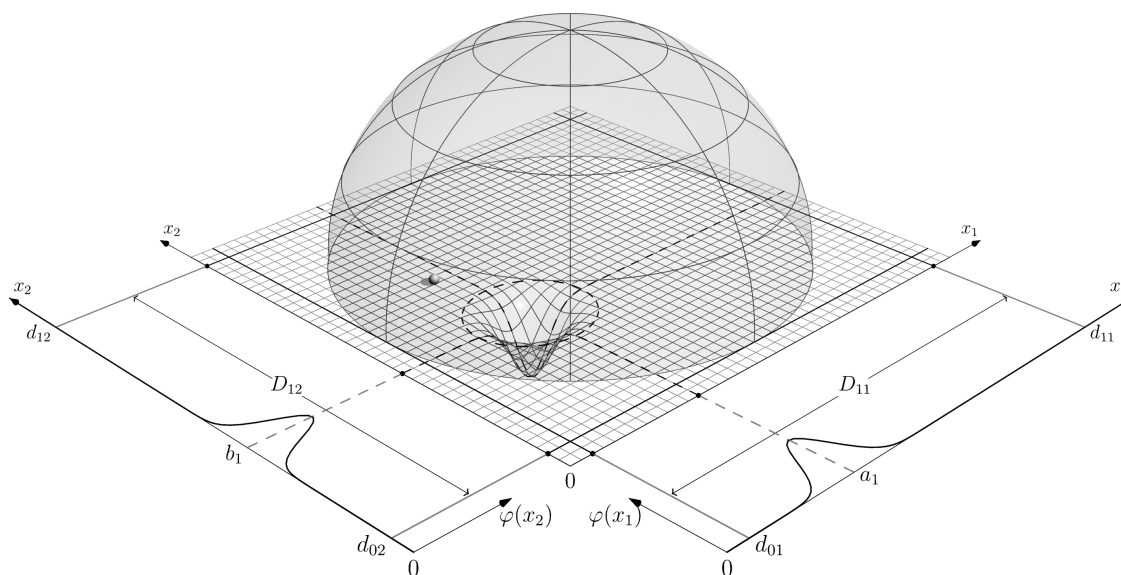


Рис. 2. Первый модельный пример

Находя математические ожидания случайных величин x_1 и x_2 , получим оценку (возможно смещённую) точки сгущения параметров системы. Если вычислить среднеквадратические отклонения случайных величин x_1 и x_2 , получим параметры, приближённо описывающие геометрию впадины. Впадину можно представить в виде эллипса с полуосями, равными $3\sigma_{x_1}$ и $3\sigma_{x_2}$, где σ_{x_1} и σ_{x_2} — среднеквадратические отклонения случайных величин x_1 и x_2 соответственно. При этом наиболее глубокая точка впадины (наиболее устойчивое состояние системы) имеет координаты, равные значениям пиков плотностей распределения случайных величин x_1 и x_2 .

Приведённый метод обработки результатов наблюдений эквивалентен методам обработки результатов опроса равноправных экспертов. При неравноправии экспертов среднее значение каждого параметра вычисляется по формуле (3), в которой веса экспертов удовлетворяют условию нормировки.

Механический аналог эффективности решения поставленной задачи каждым экспертом рассматривать не будем.

Перейдём к рассмотрению механических аналогов несогласованных оценок экспертов. Предположим, что отсутствуют электромагниты, описываемые переменными x_3 и x_4 , а в основании имеются два углубления (рис. 3). В соответствии с изложенными выше причинами, на графиках сглаженных статистических плотностей распределения случайных величин x_1 и x_2 пики этих функций будут наблюдаться соответственно при: $x_1 = a_1$ и $x_1 = a_2$; $x_2 = b_1$.

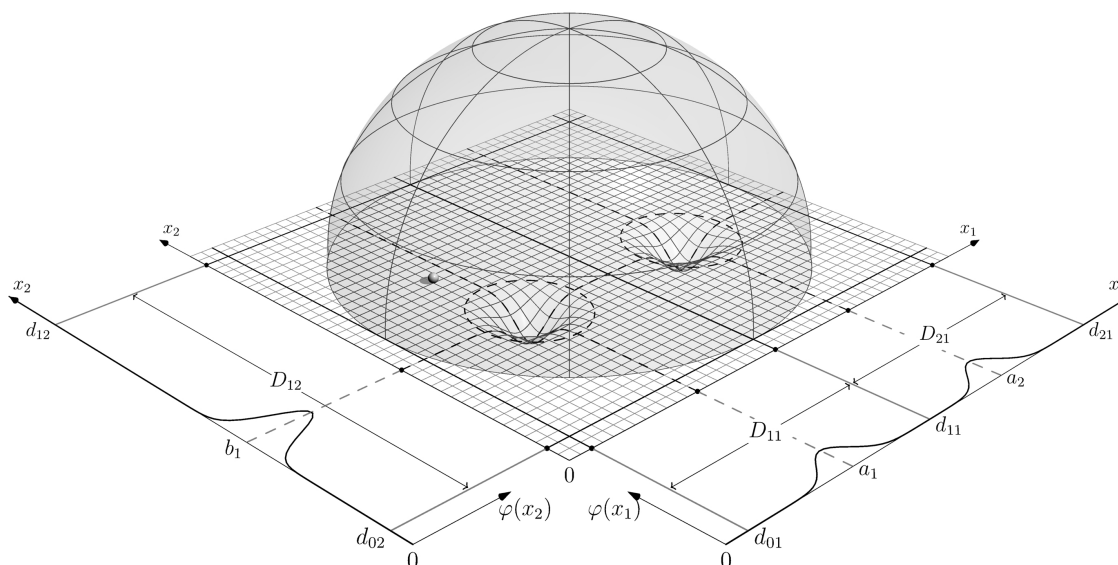


Рис. 3. Второй модельный пример

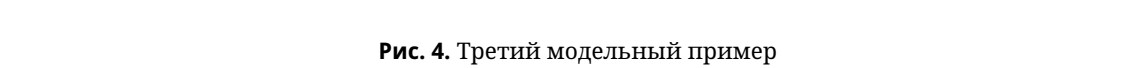
Если вычислить в этих условиях математические ожидания случайных величин x_1 и x_2 , то получим координаты точки на плоскости, лежащей между впадинами. Её положение будет зависеть от соотношения площадей между пиками гистограммы на рисунке (ближе она будет находиться к тому пику, площадь которого больше), и точкой равновесия рассматриваемой системы она не будет.

Рисунок 3 наглядно демонстрирует, что в данном случае необходимо рассчитывать не математическое ожидание величины x_1 , а два условных математических ожидания. Одно из них должно вычисляться при условии принадлежности x_1 области первого пика, а другое — при условии принадлежности x_1 области второго пика. Точкой, разделяющей область допустимых значений параметра x_1 на области, соответствующие каждой своему пику, является точка минимума статистической плотности распределения случайной величины x_1 (на рисунке $x_1 = d_{11}$).

Геометрическая оценка областей устойчивости проводится аналогично первому примеру, но теперь для случайной величины x_1 необходимо использовать условные математические ожидания и условные среднеквадратические отклонения, характеризующие рассматриваемые области устойчивости.

Усложним далее систему, рассмотрев несимметричное расположение впадин в основании при отсутствии электромагнитов, описываемых переменными x_3 и x_4 (рис. 4). На рисунке представлены соответствующие статистические плотности распределения случайных величин x_1 и x_2 .

Если размеры трёх впадин на рисунке одинаковы или близки, то площадь пика плотности распределения x_2 при $x_2 = b_1$ будет в два раза больше, чем при $x_2 = b_2$. Это объяс-



Из рисунка 4 видно, что теперь методом из предыдущего примера нельзя вычислить координаты и размеры областей устойчивости, так как мешает впадина с координатами $x_1 = a_2$ и $x_2 = b_2$.

Введём в рассмотрение множества $\tilde{D}_1 = \{D_{11}, D_{21}, D_{31}\}$ и $\tilde{D}_2 = \{D_{12}, D_{22}\}$. Образует их декартово произведение $\tilde{D} = \tilde{D}_1 \times \tilde{D}_2$, элементами которого будут кортежи, представленные в таблице 3.

Таблица 3. Области возможных положений шарика из третьего примера

(то есть областей устойчивости). Поэтому, считая множество $\tilde{D}$ полным множеством независимых случайных событий, можно вычислить статистические вероятности его элементов (иначе говоря, статистическую частоту случаев, когда шарик наблюдался в соответствующей области):

$$\begin{cases} P(D_{11}, D_{12}) = P^*(x_1 \in D_{11} \& x_2 \in D_{12}), \\ P(D_{11}, D_{22}) = P^*(x_1 \in D_{11} \& x_2 \in D_{22}), \\ P(D_{21}, D_{12}) = P^*(x_1 \in D_{21} \& x_2 \in D_{12}), \\ P(D_{21}, D_{22}) = P^*(x_1 \in D_{21} \& x_2 \in D_{22}), \\ P(D_{31}, D_{12}) = P^*(x_1 \in D_{31} \& x_2 \in D_{12}), \\ P(D_{31}, D_{22}) = P^*(x_1 \in D_{31} \& x_2 \in D_{22}). \end{cases}$$

Из механической сущности рассматриваемой системы следует, что при увеличении числа наблюдений ($n \rightarrow \infty$) следующие частоты будут стремиться к нулю (так как соответствующие области не содержат впадин на плоскости): $P^*(D_{11}, D_{22})$, $P^*(D_{21}, D_{12})$, $P^*(D_{31}, D_{32})$. Сумма остальных частот — $P(D_{11}, D_{12}) + P(D_{21}, D_{22}) + P(D_{31}, D_{12})$ — будет стремиться к единице.

На этом основании можно вычислить области нахождения впадин (то есть областей устойчивости системы): $x_1 \in D_{11} \& x_2 \in D_{12}$, $x_1 \in D_{21} \& x_2 \in D_{22}$ и $x_1 \in D_{31} \& x_2 \in D_{12}$. Вычислив условные математические ожидания и среднеквадратические отклонения для каждой из указанных областей, можно приближённо найти точки и области устойчивости системы.

Данный пример является механической моделью предлагаемого метода обработки результатов опроса экспертов при несогласованных ответах экспертов в случае наличия только числовых составляющих ТЭП.

Введя качественные параметры, рассмотрим полную модель (рис. 5).

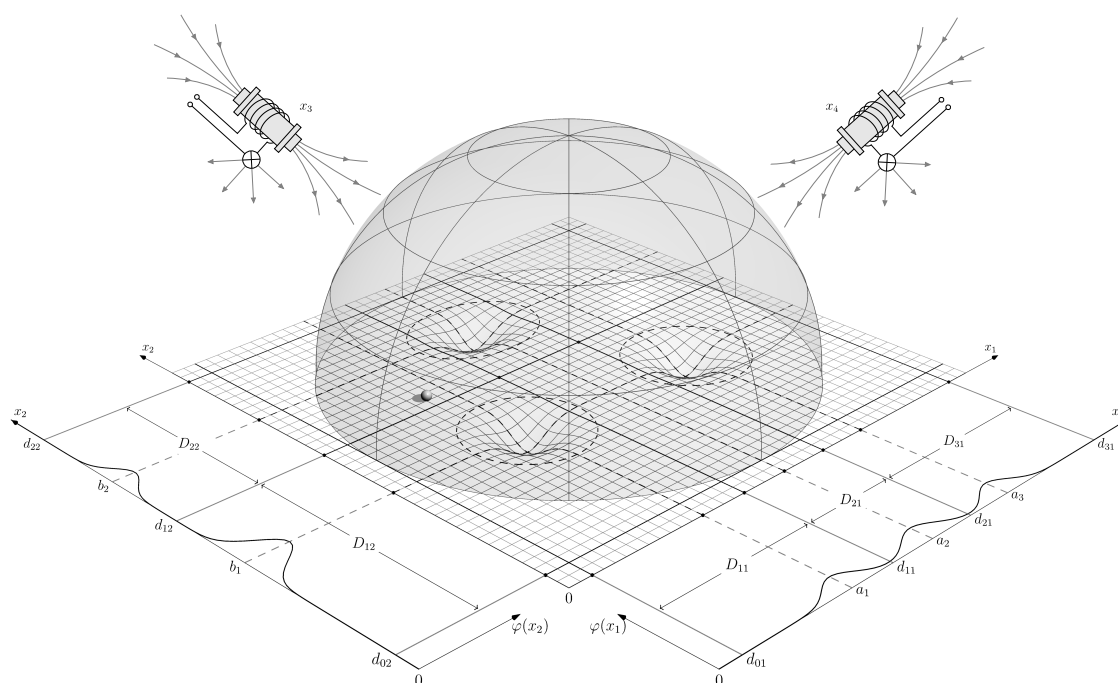


Рис. 5. Четвёртый модельный пример

Поскольку нас интересует не полное решение поставленной механической задачи, а её аналогия с методами экспертных оценок, постольку электромагниты характеризуются только качественными переменными x_3 и x_4 (описывающими их состояние — включены или выключены). На рисунке также приведены статистические плотности распределения числовых параметров модели — x_1 и x_2 .

Повторяя рассуждения из описания предыдущего примера, введём в рассмотрение множества $\tilde{D}_1 = \{D_{11}, D_{21}, D_{31}\}$ и $\tilde{D}_2 = \{D_{12}, D_{22}, D_{32}\}$.

Для качественных параметров введём в рассмотрение следующие множества их допустимых значений. Для параметра x_3 : $D_3 = D_{13} \cup D_{23}$, где $D_{13} = \{\text{включён}\}$ и $D_{23} = \{\text{выключен}\}$. Для параметра x_4 : $D_4 = D_{14} \cup D_{24}$, где $D_{14} = \{\text{включён}\}$ и $D_{24} = \{\text{выключен}\}$. Множества D_{13} и D_{23} являются элементами разбиения области допустимых значений параметра x_3 на непересекающиеся подмножества (аналогично D_{14} и D_{24} являются элементами разбиения D_4 на непересекающиеся подмножества).

Также введём множества $\tilde{D}_3 = \{D_{13}, D_{23}\}$ и $\tilde{D}_4 = \{D_{14}, D_{24}\}$. Теперь рассмотрим множество $\tilde{D}$, являющееся декартовым произведением множеств $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \tilde{D}_3$ и $\tilde{D}_4$:

$$\tilde{D} = \tilde{D}_1 \times \tilde{D}_2 \times \tilde{D}_3 \times \tilde{D}_4.$$

Кортежи, являющиеся элементами множества $\tilde{D}$, представлены в таблице 4.

Элементы декартового произведения $\tilde{D}$ являются элементами разбиения области допустимых состояний рассматриваемой системы на непересекающиеся подмножества, каждое из которых либо содержит единственную область качественной устойчивости системы, либо вообще не содержит подобных областей.

Таблица 4. Области возможных положений шарика из четвёртого примера

№ п/п	$\tilde{D}_1$	$\tilde{D}_2$	$\tilde{D}_3$	$\tilde{D}_4$	№ п/п	$\tilde{D}_1$	$\tilde{D}_2$	$\tilde{D}_3$	$\tilde{D}_4$
1	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	19	D_{21}	D_{22}	D_{23}	D_{14}
2				D_{24}	20				D_{24}
3			D_{23}	D_{14}	21		D_{32}	D_{13}	D_{14}
4				D_{24}	22				D_{24}
5		D_{22}	D_{13}	D_{14}	23			D_{23}	D_{14}
6				D_{24}	24				D_{24}
7			D_{23}	D_{14}	25	D_{31}	D_{12}	D_{13}	D_{14}
8				D_{24}	26				D_{24}
9		D_{32}	D_{13}	D_{14}	27			D_{23}	D_{14}
10				D_{24}	28				D_{24}
11			D_{23}	D_{14}	29		D_{22}	D_{13}	D_{14}
12				D_{24}	30				D_{24}
13	D_{21}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	31		D_{22}	D_{23}	D_{14}
14				D_{24}	32				D_{24}
15			D_{23}	D_{14}	33		D_{32}	D_{13}	D_{14}
16				D_{24}	34				D_{24}
17		D_{22}	D_{13}	D_{14}	35			D_{23}	D_{14}
18				D_{24}	36				D_{24}

Считая множество $\tilde{D}$ полным множеством независимых случайных событий, вычислим статистическую вероятность каждого из его элементов (как статистическую частоту случаев, в которых состояние системы наблюдалось в данной области):

$$\begin{cases} P(D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}) = P^*(x_1 \in D_{11} \& x_2 \in D_{12} \& x_3 \in D_{13} \& x_4 \in D_{14}), \\ P(D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{24}) = P^*(x_1 \in D_{11} \& x_2 \in D_{12} \& x_3 \in D_{13} \& x_4 \in D_{24}), \\ ..., \\ P(D_{31}, D_{32}, D_{23}, D_{24}) = P^*(x_1 \in D_{31} \& x_2 \in D_{32} \& x_3 \in D_{23} \& x_4 \in D_{24}). \end{cases}$$

При увеличении числа наблюдений статистические частоты областей, не содержащих области качественной устойчивости системы, будут стремиться к нулю, а статистические частоты областей, содержащих области качественной устойчивости системы, будут стремиться к некоторым постоянным для данной системы значениям (при этом их сумма будет стремиться к единице).

Предположим, что

$$P(D_{11}, D_{12}, D_{23}, D_{24}) + P(D_{21}, D_{12}, D_{23}, D_{24}) + \\ + P(D_{31}, D_{12}, D_{23}, D_{24}) + P(D_{11}, D_{22}, D_{13}, D_{14}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Это означает, что следующие элементы декартового произведения $\tilde{D}$ являются областями качественной устойчивости рассматриваемой системы:

$$\begin{aligned} &(x_1 \in D_{11}) \& (x_2 \in D_{12}) \& (x_3 \in D_{23}) \& (x_4 \in D_{24}), \\ &(x_1 \in D_{21}) \& (x_2 \in D_{22}) \& (x_3 \in D_{23}) \& (x_4 \in D_{24}), \\ &(x_1 \in D_{31}) \& (x_2 \in D_{12}) \& (x_3 \in D_{23}) \& (x_4 \in D_{24}), \\ &(x_1 \in D_{11}) \& (x_2 \in D_{22}) \& (x_3 \in D_{13}) \& (x_4 \in D_{14}). \end{aligned}$$

5. СРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ

Последний пример соответствует окончательному виду механической модели предлагаемого метода экспертных оценок второй группы [2, 3]. Поэтому именно для него рассмотрим способ измерения расстояния между различными состояниями системы.

Поскольку состояния рассматриваемой системы описываются наборами значений параметров различных типов, постольку в данном случае невозможна числовая оценка (измерение) расстояния. Будем измерять расстояние между состояниями системы на основании рассмотрения областей её качественной устойчивости.

Рассмотрим 10-мерное линейное пространство двоичных векторов и интерпретируем составляющие векторов следующим образом (рис. 6). Каждой переменной x_j однозначно соответствует своя группа составляющих $\tilde{y}_\mu$. В свою очередь, каждая составляющая $\tilde{y}_\mu$ однозначно соответствует своему элементу разбиения области допустимых значений переменной x_j .

Каждому элементу декартова произведения $\tilde{D}$ соответствует единственный вектор данного линейного пространства следующим образом. На примере $(D_{11}, D_{22}, D_{13}, D_{14})$: 1) $x_1 \in D_{11}$, следовательно $\tilde{y}_1 = 1$, $\tilde{y}_2 = 0$ и $\tilde{y}_3 = 0$; 2) $x_2 \in D_{22}$, следовательно $\tilde{y}_4 = 0$, $\tilde{y}_5 = 1$ и $\tilde{y}_6 = 0$; 3) $x_3 \in D_{13}$, следовательно $\tilde{y}_7 = 1$ и $\tilde{y}_8 = 0$; 4) $x_4 \in D_{14}$, следовательно $\tilde{y}_9 = 1$ и $\tilde{y}_{10} = 0$. Таким образом, области $(D_{11}, D_{22}, D_{13}, D_{14})$ соответствует вектор (100 010 10 10).

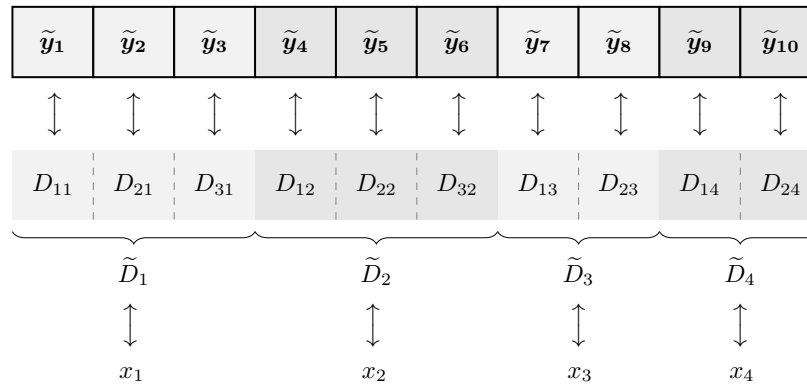


Рис. 6. Структура двоичного вектора для четвёртого примера

Части векторов рассматриваемого векторного пространства не соответствуют элементам декартового произведения $\tilde{D}$.

Заметим, что вместо рассматриваемого множества $\tilde{D}$ как пространства элементарных событий можно рассматривать введённое линейное пространство. Тогда:

- Векторам, которым не соответствуют элементы множества $\tilde{D}$, нужно приписать вероятность, равную нулю. Формальным признаком таких векторов является выполнение одного из следующих двух взаимоисключающих условий: 1) в группе составляющих вектора, соответствующих одной переменной x_j , содержатся только нули; 2) группа составляющих вектора, соответствующих одной переменной x_j , содержит не менее двух единиц.
- Векторам, которым соответствуют элементы множества $\tilde{D}$, нужно приписать вероятности соответствующих им элементов.

Таким образом, строить данное векторное пространство можно сразу после рассмотрения сглаженных статистических плотностей распределения числовых параметров x_j . Оно также позволяет вычислять области качественной устойчивости системы.

С помощью введённого векторного пространства можно измерять расстояние между:

- состоянием системы и всеми точками качественной устойчивости системы (областями качественной устойчивости);
- двумя качественно устойчивыми состояниями системы;
- любыми двумя произвольными состояниями системы.

Для этого заметим, что если произвести поразрядное сложение по модулю 2 двух векторов, соответствующих различным состояниям системы, то в группе $\tilde{y}_\mu$, соответствующих одной переменной x_j :

- либо все составляющие этой группы будут равны нулю (это произойдёт, если у двух сравниваемых состояний значения переменной x_j принадлежат одному элементу разбиения её области допустимых значений);
- либо две составляющие этой группы будут равны единице, а остальные — нулю (это произойдёт, если у двух сравниваемых состояний системы значения переменной x_j принадлежат разным элементам разбиения её области допустимых значений).

Поэтому число единиц в векторе-результате (этого почленного суммирования по модулю 2) в два раза больше числа переменных, значения которых лежат в различных областях (элементах множества $\tilde{D}$).

Легко показать, что величина, равная половине расстояния Хэмминга, удовлетворяет аксиомам расстояния, поэтому с её помощью можно измерять указанные выше рас-

стояния. Например, измерим расстояния области устойчивости из четвертого примера $(D_{11}, D_{12}, D_{23}, D_{24})$ по отношению к остальным трём областям устойчивости (результат представлен в виде таблицы 5). При этом отметим, что в соответствии с рис. 6 области $(D_{11}, D_{12}, D_{23}, D_{24})$ соответствует вектор $(100\ 100\ 01\ 01)$.

Таблица 5. Сравнение областей устойчивости из четвертого примера

Область	Двоичный эквивалент	Результат суммирования	Расстояние
$(D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{24})$	$(010\ 010\ 01\ 01)$	$(110\ 110\ 00\ 00)$	2
$(D_{31}, D_{12}, D_{23}, D_{24})$	$(001\ 100\ 01\ 01)$	$(101\ 000\ 00\ 00)$	1
$(D_{11}, D_{22}, D_{13}, D_{14})$	$(100\ 010\ 10\ 10)$	$(000\ 110\ 11\ 11)$	3

Это означает, в частности, что: 1) расстояние области $(D_{11}, D_{12}, D_{23}, D_{24})$ от области $(D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{24})$ равно 2, то есть значения двух переменных из набора (x_1, x_2, x_3, x_4) для указанных областей принадлежат различным подмножествам разбиения их областей допустимых значений; 2) расстояние области $(D_{11}, D_{12}, D_{23}, D_{24})$ от области $(D_{31}, D_{12}, D_{23}, D_{24})$ равно 1, то есть значения ровно одной составляющей двух точек (по одной из сравниваемых областей) принадлежат различным подмножествам разбиения области допустимых значений этой составляющей.

6. ОГРАНИЧЕНИЯ НА СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ

С помощью введённого линейного пространства двоичных векторов можно задавать количественные и качественные ограничения на значения параметров состояний исследуемой системы.

Найденные области качественной устойчивости системы соответствуют решениям следующего логического уравнения, заданного в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ):

$$\begin{aligned} & y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 y_4 \bar{y}_5 \bar{y}_6 \bar{y}_7 y_8 \bar{y}_9 y_{10} \vee \bar{y}_1 y_2 \bar{y}_3 \bar{y}_4 y_5 \bar{y}_6 \bar{y}_7 y_8 \bar{y}_9 y_{10} \vee \\ & \bar{y}_1 \bar{y}_2 y_3 y_4 \bar{y}_5 \bar{y}_6 \bar{y}_7 y_8 \bar{y}_9 y_{10} \vee y_1 \bar{y}_2 \bar{y}_3 \bar{y}_4 y_5 \bar{y}_6 y_7 \bar{y}_8 y_9 \bar{y}_{10} = 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Предположим, что по какой-либо (от нас не зависящей) причине установлена необходимость в выполнении следующего ограничения:

$$(x_1 < a_2) \& (x_3 = 1) = 1.$$

В соответствии с рисунком 6, условию $x_1 < a_2$ приближённо соответствует условие

$$(x_1 \in D_{11}) \vee (x_1 \in D_{21}) = 1,$$

а условие $x_3 = 1$ эквивалентно условию

$$(x_1 \in D_{13}) = 1.$$

Поэтому накладываемое на области устойчивости ограничение имеет вид:

$$(y_1 \vee y_2) y_7 = y_1 y_7 \vee y_2 y_7 = 1. \quad (7)$$

Из множества решений уравнения (6) выбираем лишь те, которые являются решением уравнения (7). В данном случае решение единственное, оно соответствует последнему члену дизъюнкции (6):

$$(100\ 010\ 10\ 10).$$

Таким образом мы получили следующую область устойчивости системы:

$$\begin{cases} x_1 \in D_{11}, \\ x_2 \in D_{22}, \\ x_3 \in D_{13}, \\ x_4 \in D_{14}. \end{cases}$$

Она эквивалентна:

$$\begin{cases} d_{01} \leq x_1 < d_{11}, \\ d_{12} \leq x_2 < d_{22}, \\ x_3 = \text{«ВКЛ»}, \\ x_4 = \text{«ВКЛ»}. \end{cases}$$

Корректировать область значений параметра x_1 с учетом условия $x_1 < a_2$ не требуется, поскольку $d_{11} < a_2$ (рис. 5), то есть ограничение выполняется автоматически.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена мысленная механическая модель морфологического метода принятия управленческих решений в условиях неопределённости, в частности для прогнозирования значений ТЭП перспективных образцов техники [2, 3]. Значимыми преимуществами метода перед аналогами являются:

- возможность обработки результатов опроса экспертов при наличии в составе ТЭП одновременно как количественных, так и качественных показателей;
- возможность принятия обоснованного решения в случае наличия несогласованности в ответах экспертов;
- возможность оценки удалённости (или близости) любых двух комбинаций значений ТЭП;
- возможность сравнения любых двух комбинаций значений ТЭП без использования свёртки значений всех составляющих ТЭП в один показатель.

Механическая аналогия призвана через формирование наглядных образов объяснить сущность метода и упростить процедуру интерпретации результатов его применения, а также помочь в дальнейшем исследовании отнесённых здесь ко второй группе экспертных методов.

Проиллюстрированный математический аппарат носит универсальный характер и может быть использован как основа для разработки новых инструментальных средств, интегрируемых в системы поддержки принятия решений общего или специального назначения.

Список литературы

1. Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф. П. Введение в системный анализ. М.: Высшая школа, 1989. 367 с.
2. Харченко Е. А. Морфологический подход к принятию обоснованных решений по экспертным суждениям // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 2. С. 42–56. doi:10.26456/vtrmk531
3. Харченко Е. А. Алгоритм морфологического метода экспертных оценок для решения задачи прогнозирования // Компьютерные инструменты в образовании. 2023. № 2. С. 5–20. doi:10.32603/2071-2340-2023-2-5-20
4. Жуков А. О. Системный анализ. Часть 1. Философско-методологические аспекты. М.: ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ), 2022. 168 с.
5. Степанов Ю. С., Тарапанов А. С., Харламов Г. А. Эвристические методы в инженерном деле. Орел: ФГБОУ ВПО «Госуниверситет — УНПК», 2014. 181 с.
6. Альтишуллер Г. С. Алгоритм изобретения. М.: Московский рабочий, 1973. 164 с.
7. Альтишуллер Г. С. Творчество как точная наука. М.: Советское радио, 1979. 184 с.
8. Альтишуллер Г. С. Найти идею. Введение в теорию решения изобретательских задач. Новосибирск: Наука, 1985. 196 с.
9. Половинкин А. И. Основы инженерного творчества. М.: Машиностроение, 1988. 368 с.

Поступила в редакцию 30.09.2024, окончательный вариант — 24.10.2024.

Харченко Елена Алексеевна, старший преподаватель кафедры инфокогнитивных технологий факультета информационных технологий Московского политехнического университета, ✉ elenakhaa@yandex.ru

Computer tools in education, 2024

№ 3: 14–32

<http://cte.eltech.ru>

doi:10.32603/2071-2340-2024-3-14-32

A Mechanical Model of the Morphological Method of Decision-Making in Conditions of Uncertainty

Kharchenko E. A.¹, Senior Lecturer, ✉ elenakhaa@yandex.ru, orcid.org/0000-0002-5082-4564

¹Moscow Polytechnic University, 38, B. Semenovskaya str., 107023, Moscow, Russia

Abstract

A mechanical model of the morphological method of decision-making under uncertainty is proposed in order to reinforce the mathematical apparatus on which the method is based. The methods of expert assessments are divided into two enlarged groups, in one of which the considered method is positioned. A description of a mechanical model simulating the elements and characteristics of the methods of the selected group is given. Several specific variants of the model are described: the processing of the observation results is compared with the processing of the results of the expert survey. The method of comparing the states of the system and the method of imposing restrictions on the state of the system are illustrated. The model itself is based on simple and well-studied physical effects and phenomena.

Keywords: *system analysis, morphological box, theory of inventive problem solving, technical device, Fritz Zwicky, TIPS.*

Citation: E. A. Kharchenko, "A Mechanical Model of the Morphological Method of Decision-Making in Conditions of Uncertainty", *Computer tools in education*, no. 3, pp. 14–32, 2024 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2024-3-14-32

References

1. F. I. Peregudov, F. P. Tarasenko, *Vvedenie v sistemnyj analiz* [Introduction to System Analysis], Moscow: Vysshaya shkola, 1989 (in Russian).
2. E. A. Kharchenko, "The morphological approach to making reasonable decisions based on expert judgements", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika*, no. 2, pp. 42–56, 2019 (in Russian); doi:10.26456/vtpmk531
3. E. A. Kharchenko, "Algorithm of the Morphological Method of Expert Estimates for Solving the Forecasting Problem", *Computer tools in education*, no. 2, pp. 5–20, 2023 (in Russian); doi:10.32603/2071-2340-2023-2-5-20
4. A. O. Zhukov, *Sistemnyj analiz. Chast' 1. Filosofsko-metodologicheskie aspekty* [System Analysis. Part 1. Philosophical and Methodological Aspects], Moscow: FGBU VNII GOCHS (FC), 2022 (in Russian).
5. Yu. S. Stepanov, A. S. Tarapanov, G. A. Harlamov, *Evristsicheskie metody v inzhenernom dele* [Heuristic Methods in Engineering], Orel, Russia: FGBOU VPO "Gosuniversitet — UNPK", 2014 (in Russian).
6. G. S. Al'tshuller, *Algoritm izobreteniya* [The Invention Algorithm], Moscow: Moskovskij rabochij, 1973 (in Russian).
7. G. S. Al'tshuller, *Tvorchestvo kak tochnaya nauka* [Creativity as an Exact Science], Moscow: Sovetskoe radio, 1979 (in Russian).
8. G. S. Al'tshuller, *Najti ideyu. Vvedenie v teoriyu resheniya izobretatel'skih zadach* [Find an Idea. Introduction to the Theory of Inventive Problem Solving], Novosibirsk, Russia: Nauka, 1985 (in Russian).
9. A. I. Polovinkin, *Osnovy inzhenernogo tvorchestva* [Fundamentals of Engineering Creativity], Moscow: Mashinostroenie, 1988 (in Russian).

Received 30-09-2024, the final version — 24-10-2024.

Elena A. Kharchenko, Senior Lecturer of the Department of Infocognitive Technologies, Moscow Polytechnic University, ✉ elenakhaa@yandex.ru